

Análisis y estudios de casos de un manipulador robótico industrial por medio de la obtención de su modelo dinámico. Un enfoque basado en la formulación de la mecánica Lagrangiana.

Analysis and cases studies of an industrial robotic manipulator by obtaining its dynamic model. An approach based on the formulation of Lagrangian mechanics.

Alejandro Armando Hossian

Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional del Neuquén
alejandrohossian@yahoo.com.ar

Emanuel Maximiliano Alveal

Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional del Neuquén
maximilianoalveal@hotmail.com

Roberto Carabajal

Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional del Neuquén
rcarabaj@copelnet.com

Patricio Bustamante

Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional del Neuquén
bustamante_patricio@hotmail.com

Carolina Hirschfeldt

Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional del Neuquén
carolinahirschfeldt@live.com.ar

Resumen

El presente artículo aborda el estudio del modelo dinámico de un manipulador robótico industrial, en base a un enfoque de la mecánica lagrangiana.

En la sección introductoria, se explica brevemente las características del proceso de obtención del modelo dinámico para un robot manipulador.

En la segunda sección, se desarrolla el caso de estudio de un robot de una articulación rotatoria y otra prismática, a partir del desarrollo de las ecuaciones de Lagrange; las cuales permiten obtener los pares de torsión, en forma matricial, de cada articulación presentes en el dispositivo.

En la tercera sección, se presentan los resultados correspondientes a los pares de torsión aplicadas a las articulaciones obtenidas por el software de Matlab, para

distintas trayectorias articulares. Mientras que, en la cuarta sección de discusión, se debaten dichos productos.

En la quinta sección, se aborda las conclusiones del grupo y futuras líneas de trabajo.

Palabras Claves: modelo dinámico, ecuaciones de Lagrange, trayectorias articulares, pares y fuerzas.

Abstract

This article addresses the study of the dynamic model of an industrial robotic manipulator, based on a Lagrangian mechanics approach.

In the introductory section, the characteristics of the process of obtaining the dynamic model for a manipulator robot are briefly explained.

In the second section, the case study of a robot with a rotary joint and a prismatic joint is developed, based on the development of Lagrange's equations; which allow obtaining the torsion torques, in matrix form, of each joint present in the device.

In the third section, the results corresponding to the torques applied to the joints obtained by the Matlab software are presented, for different joint trajectories.

While, in the fourth discussion section, these products are discussed.

In the fifth section, the group's conclusions and future lines of work are addressed.

Keywords: *Dynamic model, Lagrange equations, joint paths, torques and forces.*

1. Introducción

1.1 Aspectos generales

El modelo dinámico en un robot manipulador permite obtener las relaciones entre los pares o fuerzas que se aplican en los actuadores de las articulaciones. Los parámetros de las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares que tienen lugar en las mismas. Este modelo permite explicar una gran variedad de fenómenos físicos presentes en la estructura mecánica del sistema – robot, tales como fuerzas centrífugas y de Coriolis, efectos inerciales, par gravitacional y fenómenos de fricción (viscosa, Coulomb y estática).

El presente proceso de investigación y desarrollo se estructura en base a tres fases. Una primera fase corresponde a la Cinemática del Robot para la obtención

de los Modelos Cinemático Directo e Inverso y del Modelo Diferencial de los manipuladores robóticos industriales; una segunda fase se corresponde con la Dinámica del Robot que para la obtención del Modelo Dinámico del mismo. La tercera fase se vincula con los aspectos de Control del robot para mejorar las características de velocidad y precisión del mismo. El problema que se analiza en este artículo se encuadra dentro de la fase del modelo dinámico del robot, dentro del modelo de proceso de investigación.

1.2 Principales herramientas de la mecánica analítica

El análisis de la dinámica del robot puede abordarse en base a dos enfoques [1]:

Modelo Dinámico Directo: se basa en obtener la evolución temporal de las variables articulares ($\Theta(t)$, $\Theta'(t)$ y $\Theta''(t)$), bajo la aplicación de un vector de fuerzas y momentos de torsión aplicados en los actuadores de las articulaciones. Es decir, obtener $\Theta(t) = f(\tau(t))$ y sus derivadas. Esta formulación del problema dinámico tiene especial valor en el análisis de la simulación del robot. [2]

Modelo Dinámico Indirecto: se basa en obtener la evolución temporal de las fuerzas y momentos de torsión que se aplican en los actuadores de las articulaciones, para conseguir una determinada evolución temporal de las variables articulares ($\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\ddot{\theta}(t)$). Es decir, obtener $\tau(t)=f(\theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t))$. [3]

El modelo de proceso de investigación y desarrollo con sus tres fases (Cinemática del Robot, Dinámica del Robot y Control del Robot) se ilustra en la figura 1.

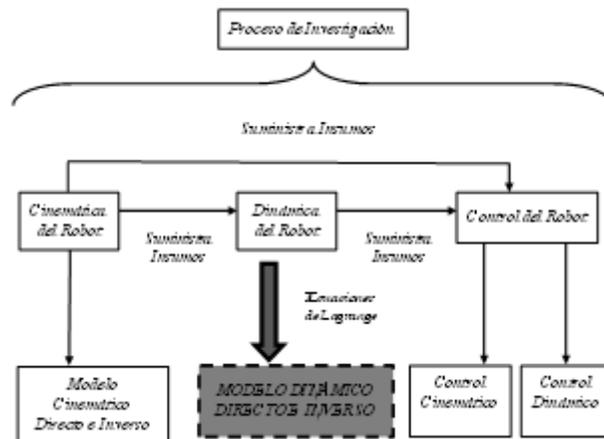


Figura 1. Modelo de proceso de investigación y desarrollo

Conforme a la figura 1, se propone un proceso de obtención del modelo dinámico de un robot manipulador en base a la mecánica Lagrangiana. Respecto al sistema de referencia asociado a la base del robot, se dispone de los parámetros dinámicos (masas, longitudes y momentos de inercia de eslabones), la matriz de transformación homogénea con la información de las coordenadas cartesianas del efector final en función de las variables articulares. El producto de salida que se obtiene de este proceso, es un vector (τ) de fuerzas y momentos de torsión aplicados en los actuadores de las articulaciones para obtener ciertas trayectorias articulares (posición, velocidad y aceleración).

En la figura 2 se exhibe un esquema global con los insumos de entrada y la salida a la fase de construcción del modelo dinámico.

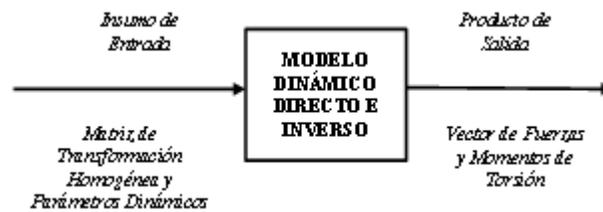


Figura 2. Insumo de entrada y salida al módulo dinámico directo e inverso para la implementación de la fase de obtención del modelo dinámico.

La descripción matemática del modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, está dada por la ecuación diferencial no lineal, determinado en la expresión 1 [4]:

$$\tau(t) = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_f(\dot{q}, f_e) \quad (1)$$

El modelo dinámico posee algunas propiedades que son de fundamental importancia para el estudio de los sistemas de control de robots manipuladores; entre las cuales se destacan: efectos inerciales, fuerzas centrípetas y de Coriolis, efecto gravitacional y efecto de fricción. Asimismo, los resultados obtenidos constituyen importantes referencias hacia el módulo de control dinámico, siendo sustanciales en el diseño del sistema de control del robot, denotado en la figura 3.

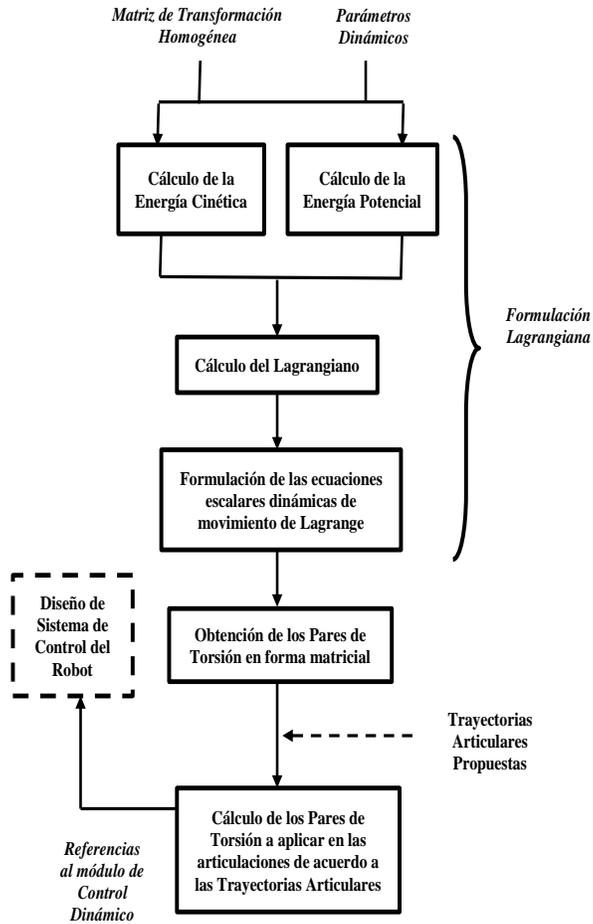


Figura 3. Proceso de obtención de los pares de torsión en las articulaciones de robots manipuladores en el marco del módulo de Modelo Dinámico Directo e Inverso

2. Métodos

En la figura 4, se observa un robot RP (articulación 1 rotatoria y articulación 2 prismática) donde, para la articulación 1, θ_1 es variable y, para la articulación 2, d_2 es variable. En figura 5, se determina un robot polar de 2 grados de libertad en disposición tumbada, cuyos parámetros se demuestran en la tabla 1.

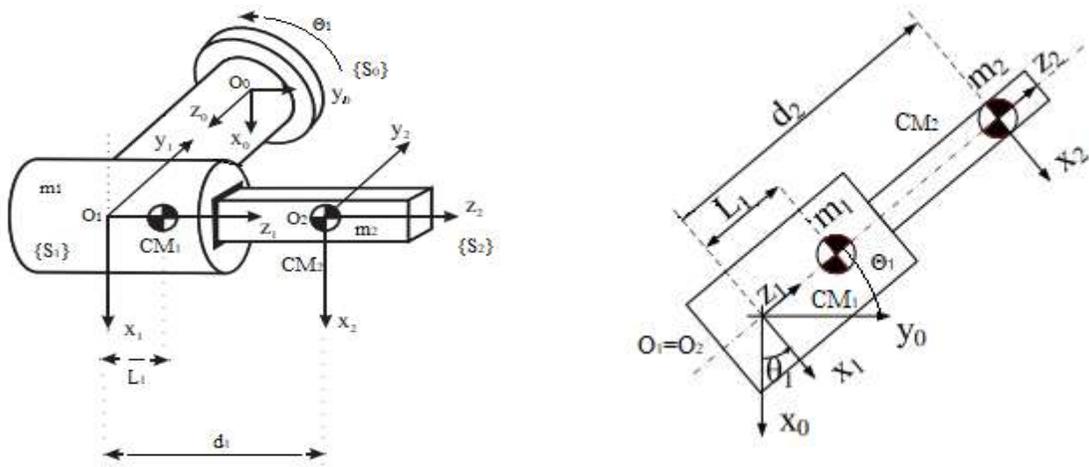


Figura 4. a) Vista Lateral B-B. b) Vista Lateral B-B. Girada θ_1 entre X_0 y X_1 .

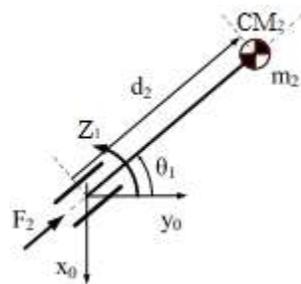


Figura 5 Robot polar de 2 grados de libertad en disposición tumbada

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	-90°
2	0	d_2	0	0

Tabla 1 Parámetros D-H

De acuerdo a estos parámetros, es posible construir el modelo cinemático directo del robot, los cuales quedan reflejados en la matriz de transformación homogénea T , expresado en (2) [5].

$$T = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & -d_2 S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 & d_2 C_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

La localización del sistema, es asociada al extremo del robot $\{S_2\}$ con respecto al sistema asociado a la base del robot $\{S_0\}$. Los sistemas de referencia $\{S_0\}$, $\{S_1\}$, y $\{S_2\}$ de las figuras 1,2, y 3, se han utilizado para obtener los parámetros D-H.

Para el desarrollo de las ecuaciones de Lagrange se toma un sistema de referencia $\{S_0\}$ con origen 0; conforme con un esquema como el de la figura 2, correspondiente a la vista lateral B-B, estando ahora el sistema $\{S_0\}$ de la figura 4 rotando 90° en sentido antihorario.

Con este sistema se calculan las energías cinéticas y potencial de Lagrange, sin quitarle generalidad al análisis. En la figura 6, se observa un esquema similar a la figura 4, a partir del cual se desarrollan las ecuaciones de Lagrange.

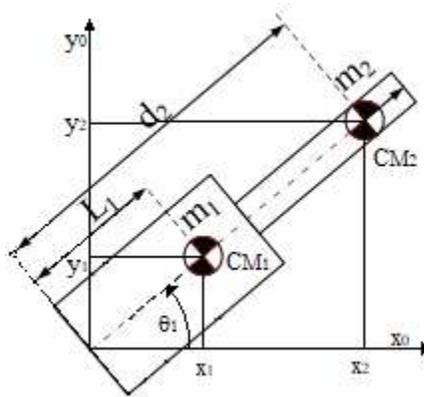


Figura 6 Vista Lateral B-B. Esquema del robot girado Θ_1 entre X_0 y X_1 .

Donde θ_1 y d_1 son variables articulares, $\text{sen } \theta_1 = S_1$ y $\text{cos } \theta_1 = C_1$.

Formulación Lagrangiana

I. Cálculo de la energía cinética del robot

Posición, velocidad y energía cinética para el eslabón 1.

Las variables de la energía cinética para el eslabón 1 quedan reflejadas en las expresiones 3 y 4, donde se desarrollan en las expresiones posteriores.

$$x_1 = L_1 C_1 \rightarrow \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = -L_1 S_1 \dot{\theta}_1 \quad (3)$$

$$y_1 = L_1 S_1 \rightarrow \dot{y}_1 = \frac{dy_1}{dt} = L_1 C_1 \dot{\theta}_1 \quad (4)$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 C_1 \dot{\theta}_1 \\ L_1 S_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

y el cuadrado de la velocidad es,

$$v_1^2 = v_1^T \cdot v_1 = [-L_1 C_1 \dot{\theta}_1 \quad L_1 S_1 \dot{\theta}_1] \cdot \begin{bmatrix} -L_1 C_1 \dot{\theta}_1 \\ L_1 S_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = L_1^2 S_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_1^2 C_1^2 \dot{\theta}_1^2 =$$

$$v_1^2 = L_1^2 \dot{\theta}_1^2 (S_1^2 + C_1^2) = L_1^2 \dot{\theta}_1^2$$



(6)

Luego, la energía cinética total del eslabón 1 (K_1), se obtiene sumando las contribuciones de la energía cinética de traslación (K_{1T}). Por lo tanto, la energía cinética total del eslabón 1 se obtiene de la siguiente manera:

$$K_1(q, \dot{q}) = K_{1T} + K_{1R} = \frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1 \rightarrow$$

$$(A) K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1$$
(7)

Donde q y \dot{q} se refieren a las variables articulares (θ_1 y d_1) y sus derivadas ($\dot{\theta}_1$ y \dot{d}_1), y J_1 es el momento de inercia del eslabón 1 respecto a su centro de masa [6].

Posición, velocidad y energía cinética para el eslabón 2.

Las variables de la energía cinética para el eslabón 1 quedan reflejadas en las expresiones 8 y 9, donde se desarrollan en las expresiones posteriores.

$$x_2 = d_2 S_1 \rightarrow \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = -d_2 S_1 \dot{\theta}_1 + \dot{d}_2 C_1$$
(8)

$$y_2 = d_2 C_1 \rightarrow \dot{y}_2 = \frac{dy_2}{dt} = d_2 C_1 \dot{\theta}_1 + \dot{d}_2 S_1$$
(9)

El producto de $v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_2 S_1 \dot{\theta}_1 + \dot{d}_2 C_1 \\ d_2 C_1 \dot{\theta}_1 + \dot{d}_2 S_1 \end{bmatrix}$ y el cuadrado de la velocidad es,

$$v_2^2 = v_2^T \cdot v_2 = [-d_2 S_1 \dot{\theta}_1 + \dot{d}_2 C_1 \quad d_2 C_1 \dot{\theta}_1 + \dot{d}_2 S_1] \begin{bmatrix} -d_2 S_1 \dot{\theta}_1 + \dot{d}_2 C_1 \\ d_2 C_1 \dot{\theta}_1 + \dot{d}_2 S_1 \end{bmatrix} =$$

$$= (-d_2 S_1 \dot{\theta}_1 + \dot{d}_2 C_1)(-d_2 S_1 \dot{\theta}_1 + \dot{d}_2 C_1) + (d_2 C_1 \dot{\theta}_1 + \dot{d}_2 S_1)(d_2 C_1 \dot{\theta}_1 + \dot{d}_2 S_1) =$$

$$= d_2^2 S_1^2 \dot{\theta}_1^2 - d_2 \dot{d}_2 C_1 S_1 \dot{\theta}_1 - d_2 \dot{d}_2 C_1 S_1 \dot{\theta}_1 + d_2^2 C_1^2 + d_2^2 C_1^2 \dot{\theta}_1^2 +$$

$$+ d_2 \dot{d}_2 C_1 S_1 \dot{\theta}_1 + d_2 \dot{d}_2 C_1 S_1 \dot{\theta}_1 + d_2^2 S_1^2 = d_2^2 \dot{\theta}_1^2 (S_1^2 + C_1^2) +$$

$$+ d_2^2 (S_1^2 + C_1^2) = d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + d_2^2$$

$$v_2^2 = d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + d_2^2$$
(10)

Luego, la energía cinética total del eslabón 2 (K_2), se obtiene sumando las contribuciones de la energía cinética de traslación (K_{2T}). Por lo tanto, la energía cinética total del eslabón 2 se obtiene de la siguiente manera:

$$K_2(q, \dot{q}) = K_{2T} + K_{2R} = \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_1^2 \rightarrow$$

$$(B) K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 (d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + d_2^2) + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_1^2 \quad (11)$$

Donde q y \dot{q} se refieren a las variables articulares (θ_1 y d_2) y sus derivadas ($\dot{\theta}_1$ y \dot{d}_2), y J_2 es el momento de inercia del eslabón 2 respecto a su centro de masa.

Para la energía cinética total, se reemplaza (A) ($K_1(q, \dot{q})$) y (B) ($K_2(q, \dot{q})$) en

$$K_{TOTAL}(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}) \rightarrow$$

$$K_{TOTAL}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 L_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + d_2^2) + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_1^2 \quad (F) \quad (12)$$

II. Cálculo de la energía potencial del robot

La energía potencial total del robot es la suma de la energía potencial almacenada en cada eslabón ($U_{TOTAL}=U_1+U_2$). Para el eslabón 1 se tiene que $U_1=m_1 g L_1 \cos \theta_1 = m_1 g L_1 S_1$ (C). Para el eslabón 2 se tiene que $U_2=m_2 g d_2 \sin \theta_1 = m_1 g d_2 C_1$ (D). La energía potencial del robot se obtiene reemplazando (C) ($U_1(q)$) y (D) ($U_2(q)$) en la expresión: $U_{TOTAL}=U_1+U_2 \rightarrow U_{TOTAL}= m_1 g L_1 S_1 + m_1 g d_2 C_1$ (G) [7].

III. Cálculo Lagrangiano

La forma de calcular el lagrangiano del robot manipulador es realizando la diferencia entre la energía cinética total y la energía potencial gravitatoria total.

Lagrangiano: $L(q(t), \dot{q}(t)) = K_{TOTAL}(q(t), \dot{q}(t)) - U_{TOTAL}(q(t))$.

Se obtiene la expresión (H) haciendo (F)-(G).

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = \left[\frac{1}{2} m_1 L_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + d_2^2) + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_1^2 \right] -$$

$$- [m_1 g L_1 S_1 + m_2 g d_2 S_1] = \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_1^2 - m_1 g L_1 S_1 - m_2 g d_2 S_1 \quad (H) \quad (13)$$

Omitiendo por simplicidad los momentos de inercia propios de cada eslabón respecto a sus centros de masa, la ecuación (H) queda:

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2 - m_1 g L_1 S_1 - m_2 g d_2 S_1 \quad (H') \quad (14)$$

Se recuerda que $q(t)$ y $\dot{q}(t)$ simbolizan a las variables articulares ($\theta_1(t)$ y $d_1(t)$) y sus derivadas ($\dot{\theta}_1(t)$ y $\dot{d}_1(t)$) [8].

IV. Formulación de las ecuaciones escalares dinámicas de movimiento de Lagrange para cada grado de libertad del robot.

La ecuación de Lagrange que se debe aplicar para cada grado de libertad es:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\delta L(q(t), \dot{q}(t))}{\delta \dot{q}_i} \right] - \frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta q_i} = Z_i - F_f(\dot{q}, f_e) \quad (14)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Donde $F_f(\dot{q}, f_e)$ se refiere a los modelos de fricción viscosa, COULOMB y estática.

Si se omiten estos efectos, nos queda lo siguiente:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta \dot{q}_i} \right] - \frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta q_i} = Z_i \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Se obtiene las cuatro expresiones (J), (K), (L), y (M); derivando L (de la ecuación H') respecto a la posición y a la velocidad articular de cada coordenada generalizada (θ_1 , d_1 , $\dot{\theta}_1$, y \dot{d}_1) [9].

$$\frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta \dot{\theta}_1} = m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 \dot{\theta}_1 \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta \dot{\theta}_1} \right] = m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 \quad (J) \quad (17)$$

$$\frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta \dot{d}_1} = m_2 \dot{d}_2 \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta \dot{d}_1} \right] = m_2 \ddot{d}_2 \quad (K) \quad (19)$$

$$\frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta \theta_1} = m_1 g L_1 C_1 - m_2 g d_2 C_1 (L) \quad (20)$$

$$\frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta d_2} = m_1 d_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 g S_1 (M) \quad (21)$$

Obtención de los pares de torsión en forma matricial

Se obtienen los pares de torsión de las articulaciones 1 y 2. Tener en cuenta que para el caso propuesto; se tiene un par de torsión en la articulación (τ_1) en correspondencia con la articulación 1 rotatoria y fuerza (F_2) en correspondencia con la articulación 2 prismática.

Para obtener τ_1 se aplica la ecuación escalar dinámica de Lagrange para la articulación 1 (o grado de libertad 1).

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta \dot{\theta}_1} \right] - \frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta \theta_1} = \tau_1 \quad (22)$$

$$Z_1 = m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 d_2^2 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 - (-m_1 g L_1 C_1 - m_2 g d_2 C_1) \quad (23)$$

$$Z_1 = m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 d_2^2 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g L_1 C_1 + m_2 g d_2 C_1 \quad (24)$$

$$Z_1 = (m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 d_2^2 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g L_1 C_1 + m_2 g d_2 C_1 (N) \quad (25)$$

Para obtener F_2 se aplica la ecuación escalar dinámica de Lagrange para la articulación 2 (o grado de libertad 2).

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta \dot{d}_2} \right] - \frac{\delta L(q, \dot{q})}{\delta d_2} = F_2 \quad (26)$$

$$F_2 = m_2 \ddot{d}_2 - (m_1 d_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 g S_1) = m_2 \ddot{d}_2 - m_1 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g S_1 \quad (27)$$

La ecuación (26) es el par de torsión Z_1 que debe actuar en la articulación rotatoria 1; y la ecuación (27) corresponde a la fuerza F_2 que debe actuar en la articulación prismática 2. Se expresan las ecuaciones (26) y (27) en forma matricial [10].

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \\ m_2 d_2 \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 g L_1 C_1 + m_2 g d_2 C_1 \\ m_2 g S_1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

3. Resultados

Cálculo de los pares de torsión a aplicar en las articulaciones de acuerdo a las trayectorias articulares

La representación de Denavit –Hartenberg basada en las matrices de transformación homogénea, para formular el modelo dinámico de un robot mediante la ecuación de Lagrange, usa las matrices ${}^{i-1}A_i$ que relacionan el sistema de coordenadas de referencia del elemento i con el del elemento $i-1$. Se realizan en este caso operaciones de producto y suma innecesarias, tratándose por ello de un procedimiento ineficiente desde el punto de vista computacional. Puede comprobarse que el algoritmo es de un orden de complejidad computacional, es decir, el número de operaciones a realizar crece con la potencia 4 del número de grados de libertad. Sin embargo, conduce a unas ecuaciones finales estructurales donde aparecen de manera clara los diversos pares y fuerzas que intervienen en el movimiento (inercia, Coriolis, gravedad).

Se presenta, a continuación, al algoritmo a seguir en Matlab para obtener el modelo cinemático del robot por el procedimiento de Lagrange (L). La trayectoria se define y a partir del mismo se obtiene la velocidad y la aceleración, que es evaluado en 5 segundos dividido en 50 puntos. Como resultado se obtienen y representan gráficamente los pares y trayectorias de posición.

Se representan los pares de manera superpuesta mediante “x” a los resultados obtenidos por el algoritmo, comparando el resultado numérico con el analítico, demostrado en la figura 7.

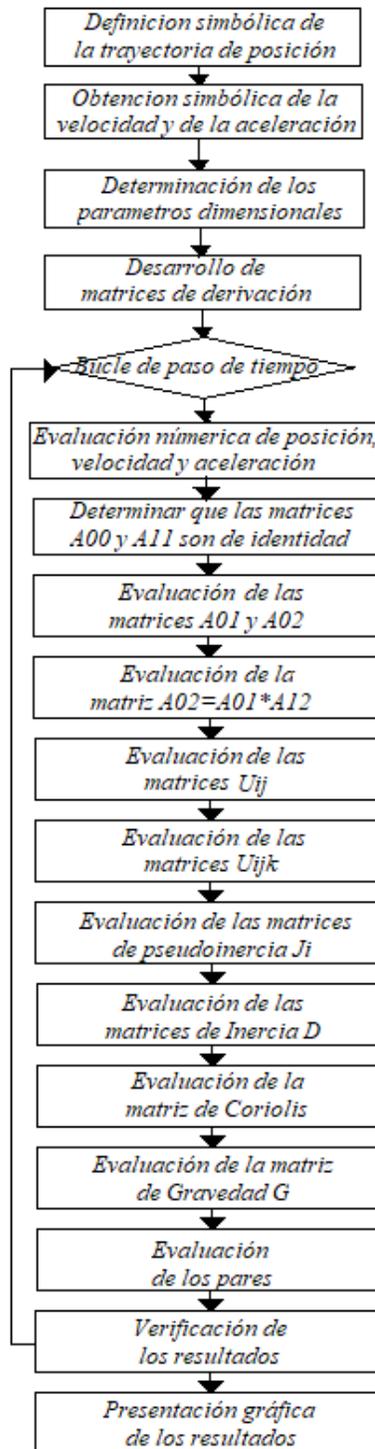


Figura 7. Diagrama de flujo del algoritmo de Lagrange en Matlab

Para el caso 1, donde la trayectoria articular es

$$\text{Trayectoria deseada: } \begin{cases} \theta_1 = \sin t + \pi/2 \\ d_2 = 1 \end{cases} \quad (29)$$

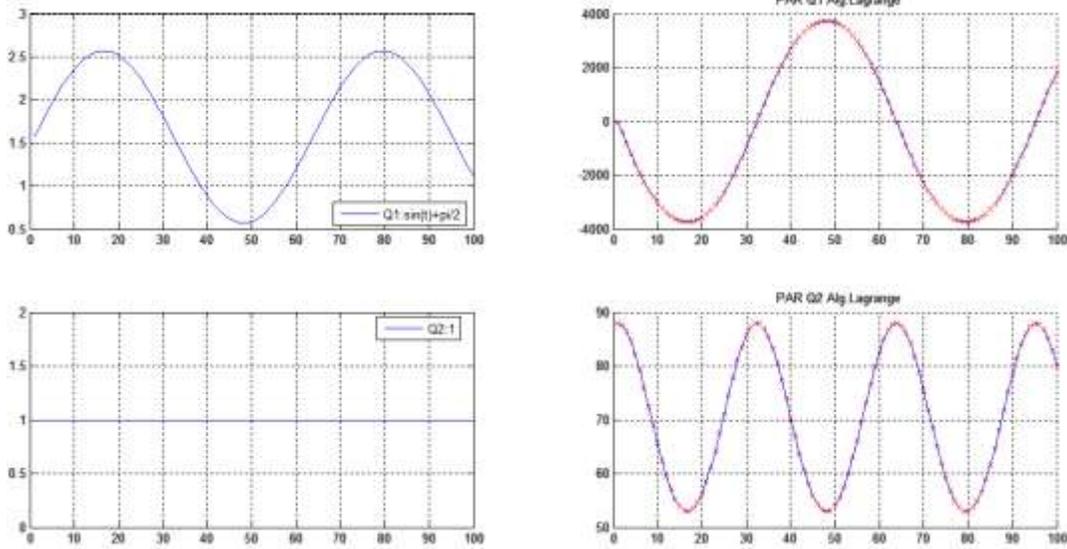


Figura 8 Trayectoria con solo el primer GdL en movimiento y pares correspondientes Para el caso 2, donde la trayectoria articular es:

$$\text{Trayectoria deseada: } \begin{cases} \theta_1 = \sin t + \pi/2 \\ d_2 = 0 \end{cases} \quad (30)$$

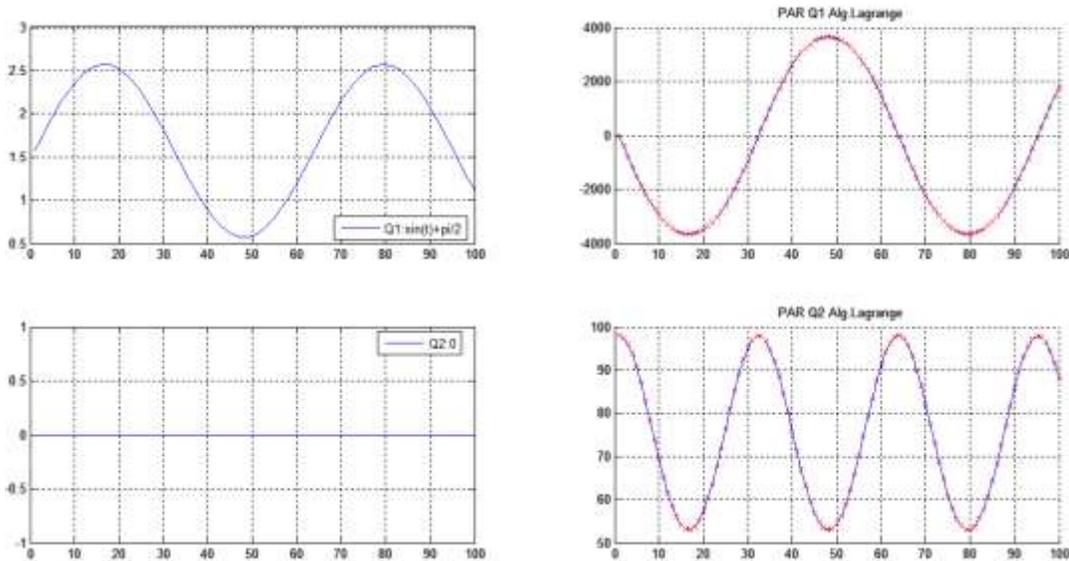


Figura 9 Trayectoria con solo el primer GdL en movimiento y segundo en cero. Para el análisis del caso 3, se empleó un nuevo código de programación.

La toolbox de robótica incluye la función `rne`, que resuelve el modelo dinámico inverso de un robot mediante el algoritmo computacional de Newton-Euler. Para su uso es preciso haber definido el robot de manera equivalente a como se hizo en las funciones del modelo cinemático, incluyendo parámetros dinámicos, demostrados en la figura 10.

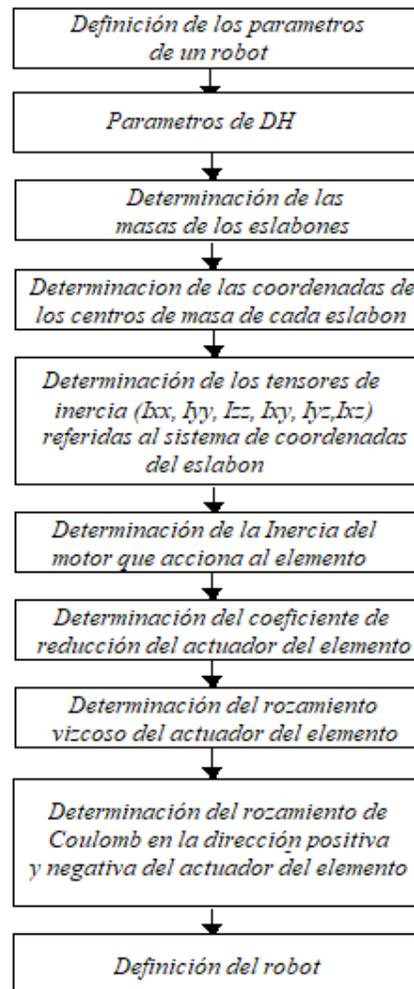


Figura 10. Diagrama de flujo de la función DefRej que define los parámetros de un robot. La función rne, propia de la función DefRej, proporciona los pares necesarios para una determinada trayectoria, definida mediante los vectores que contienen las coordenadas articulares, sus velocidades y aceleraciones. Por tanto, será preciso definir previamente estos.

Complementarias a la función rne, la toolbox de robótica cuenta con las funciones itorque, coriolis y gravload, que permiten obtener las contribuciones al par total en términos de inercia, coriolis y gravedad respectivamente.

La figura 11 muestra el resultado correspondiente a la trayectoria definida por:

$$\text{Trayectoria deseada: } \begin{cases} \theta_1 = \sin t + \pi/2 \\ d_2 = \sin 6t + 2t \end{cases} \quad (31)$$

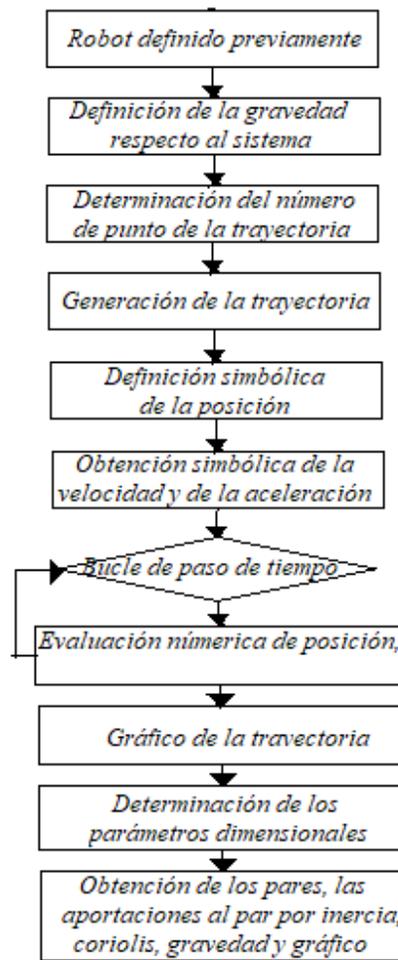
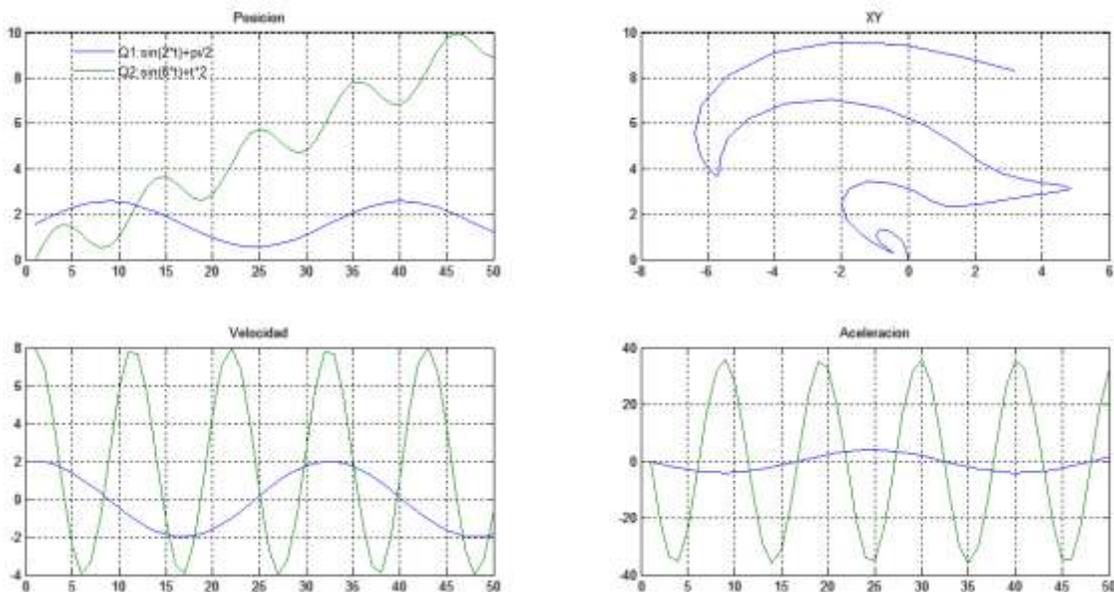


Figura 11. Diagrama de flujo del algoritmo de Lagrange en Matlab, para la obtención de inercia, coriolis y gravedad



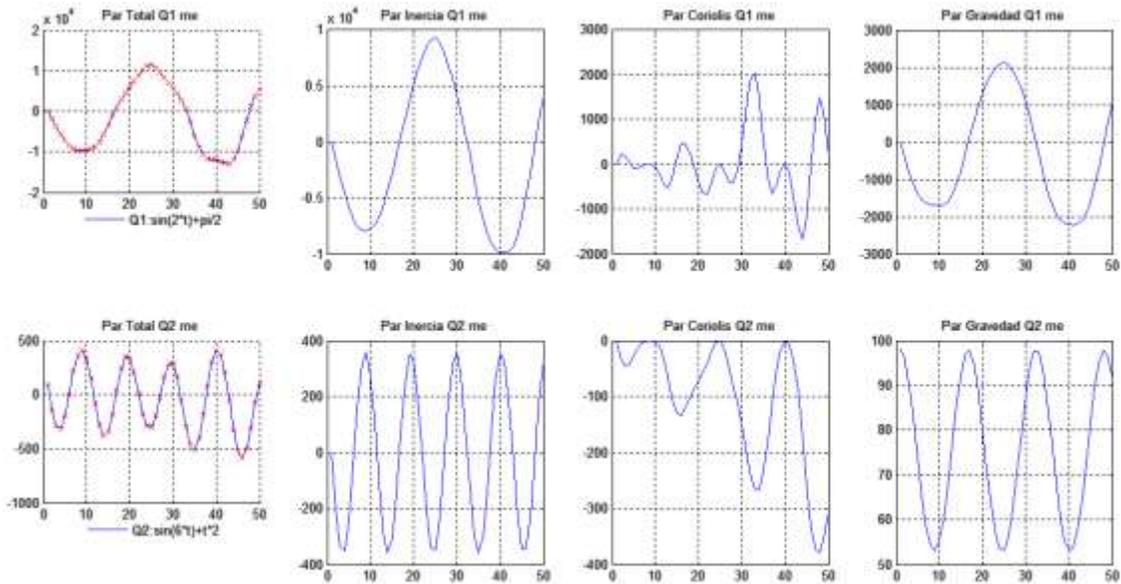


Figura 12 Gráficos de trayectorias y pares correspondientes al robot de 2 GdL en movimiento obtenida con la función rne

4. Discusión

Se aborda una discusión de los resultados obtenidos a los pares de torsión correspondientes a los tres casos analizados en la sección anterior; teniendo en cuenta a las trayectorias articulares propuestas, para el par de torsión τ_1 correspondiente a la articulación rotatoria θ_1 y la fuerza F_2 correspondiente a la articulación.

Con respecto al caso 1, en la figura 8 se visualiza el resultado obtenido del código para el conjunto de trayectorias indicadas. Sobre la gráfica del par obtenido por el algoritmo de Lagrange se ha dibujado, mediante “x”, el valor obtenido por la expresión analítica del modelo. En todas ellas se aprecia que el resultado obtenido por ambos procedimientos coincide. En las gráficas las articulares θ_1 y d_2 aparecen como q_1 y q_2 respectivamente. Y el par T_1 y F_2 , aparecen como PAR q_1 y PAR q_2 :

$$\text{Trayectoria deseada: } \begin{cases} \theta_1 = \sin t + \pi/2 \\ d_2 = 1 \end{cases} \quad (31)$$

En la figura 4, se observa que la variable articular d_2 permanece constante e igual a 1, mientras que el grado de libertad θ_1 lleva a cabo un movimiento de vaivén a izquierda a derecha en torno a la posición vertical ($\theta_1=\pi/2$).

Las ecuaciones del movimiento toman la forma:

$$T_1 = (m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + m_1 g L_1 \cos \theta_1 = K_1 \ddot{\theta}_1 + K_2 \cos \theta_1$$

$$F_2 = m_2 \ddot{d}_2 - d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \sin \theta_1 = K_3 \dot{\theta}_1^2 + K_4 \sin \theta_1 \quad (32)$$

Donde los factores K_i son constantes; debiendo señalar que el termino inercial $m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2$, es constante debido a que en este caso la variable articular d_2 también permanece constante e igual a 1. Estas ecuaciones ponen de manifiesto que al ser d_2 constante no se tienen aportaciones de pares de Coriolis al par total T_1 , y que el momento de inercia que debe vencer T_1 es constante (K_1). Por otra parte, es dable señalar que F_2 debe tomar valores no nulos, a los efectos de evitar que d_2 se mueva. De esta forma, se compensa la fuerza centrífuga originada por el giro de θ_1 y las variaciones del par de gravedad originadas por este giro.

En lo que refiere al caso 2, cabe resaltar que si se pretendiese que la variable articular d_2 se mantenga constante e igual a cero (Figura 9), la masa m_2 quedaría situada sobre el eje de giro de θ_1 . En consecuencia, se anula el término $d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2$, que constituye el efecto de las fuerzas centrífugas en la expresión correspondiente a F_2 , dado que ahora d_2 es nula. De esta manera, ahora la fuerza F_2 debe contrarrestar el efecto gravitatorio de la fuerza de gravedad en virtud de la masa m_2 , efecto éste que es variable en el tiempo al ser variable la trayectoria articular θ_1 . Las demás consideraciones correspondientes a la discusión de este caso son similares a las analizadas en el caso 1.¹

En relación al caso 3, es importante señalar que el movimiento que desarrollan ambas variables articulares están fuertemente acoplados; de esta manera resulta bastante complejo estimar cual va a ser el par necesario correspondiente al grado de libertad θ_1 , y cuál va a ser la fuerza necesaria en correspondencia con el grado de libertad d_2 . Esta clase de simulaciones con trayectorias complejas de las variables articulares (que en general son similares a las que desarrolla el manipulador en la práctica), son las que permiten predecir los valores máximos de pares y fuerzas que deben proporcionar cada actuador (del orden de 10^4 para T_1 y de 10^3 para F_2 en el presente caso de estudio) permitiendo de esta forma escoger de manera adecuada cada actuador.

5. Conclusiones

Se extraen las siguientes conclusiones acerca del presente trabajo de investigación: 1) El problema analizado se enmarca en el modelo de proceso de investigación y desarrollo ilustrado en la figura 1; y más precisamente, en el marco de la fase del modelo dinámico directo e inverso. 2) se implementa un proceso de obtención del modelo dinámico de un robot manipulador en base a la formulación Lagrangiana y conformado de tres fases que se desarrollan en forma interconectada. 3) este proceso se nutre con la matriz de transformación homogénea y los parámetros dinámicos del robot, proporcionando como salida las fuerzas y pares de torsión que se deben aplicar en cada articulación, de acuerdo a las trayectorias articulares que se proponen. 4) se presenta un caso de estudio correspondiente a un robot manipulador de dos grados de libertad con una articulación rotatoria y la otra prismática; y se obtiene su modelo dinámico inverso aplicando el modelo de proceso. 5) Se estudian en detalle tres casos experimentales con el soporte del software apropiado a tal efecto. 6) se presenta una discusión de estos casos en base a los resultados obtenidos. 7) La formulación lagrangiana posee la ventaja de que no intervienen las fuerzas de ligadura, dado que hace uso de balance de energía. Aunque cabe señalar que en lo que se refiere a los aspectos computacionales, esta formulación tiene la desventaja de no ser eficiente computacionalmente, dado que el algoritmo es de un orden de complejidad; es decir, la cantidad de operaciones que realiza crece con la potencia cuarta del número de gdl.

Se está trabajando en las siguientes líneas de investigación: I) análisis de la dinámica de los sistemas de transmisión, actuadores y equipos electrónicos. II) probar el modelo analítico obtenido en banco experimental donde los eslabones, actuadores y sistemas de transmisión se construyen en el laboratorio de nuestra facultad. III) diseño y evaluación del sistema de control dinámico del robot haciendo uso de los pares de torsión obtenidos como entrada al sistema; de esta forma, el algoritmo de control debe llevar en forma asintótica a cero el vector de error de posicionamiento ($q_{\text{error}} = q_{\text{deseada}} - q_{\text{actual}}$). IV) probar otras trayectorias articulares más complejas y analizar los efectos de acoplamiento de los ejes de las

articulaciones. V) determinación de los valores de parámetros dinámicos del robot (momentos de inercia, centros de masa y coeficientes de fricción), mediante técnicas de identificación paramétrica, tales como modelos de regresión. VI) introducción de fricciones viscosas en las articulaciones, y medir la respuesta del sistema en condiciones similares a los casos estudiados.

6. Bibliografía y Referencias

- [1] Torres, F., Pomares, J., Gil, P., Puente, S. & Aracil, R., “Robots y Sistemas Sensoriales”. Ed. Prentice Hall – España, 2002.
- [2] Craig, J. J, “Introduction to Robotics”. Ed. Addison Wesley, Reading, 1989.
- [3] Reyes Cortés, F., “Robótica – Control de Robots Manipuladores”. Ed. Alfaomega, México, 2011.
- [4] Ollero Baturone, A., “Robótica Manipuladores y robots móviles”. Ed. Alfaomega, España, 2007.
- [5] Hossian, A., Olivera, V., Cejas, L.: Analisis de conductas de vehiculos roboticos en entornos estructurados mediante la aplicacion de tecnologías inteligentes.18 Convencion científica de ingeniería y arquitectura. La Habana, Cuba. 2016
- [6] Hossian, A., Olivera, V., Cejas, L., Sapag, L.: Estudio del comportamiento de robots móviles autónomos en entornos de navegación estructurados mediante la aplicación de tecnologías inteligentes.12 Congreso interamericano de computación aplicada a la industria de procesos. Lima, Peru. 2016
- [7] Arntz, M., Gregory, T. y Zierahn, U. “The Risk of Automation for Jobs in OECD Countries: A Comparative Analysis”. OECD Social, Employment and Migration WorkingPapers No.189. París: OECD Publishing. 2016.
- [8] Bartlett, J. The Dark Net. Inside the Digital Underworld. Nueva York: Melville House. 2015
- [9] Colvin, K. F., Champaign, J., Liu, A. et al. 2014. “Learning in an Introductory Physics MOOC: All Cohorts Learn Equally, Including an On-Campus Class”. The International Review of Research in Open and Distance Learning. 15 (4): 263-283.
- [10] Brynjolfsson, E. y McAfee, A. 2014. The Second Machine Age. Nueva York y Londres: Norton & Company.