

Estudio del crecimiento de una región de interés en una imagen usando medidas de grafos

Andrea A. Rey, Gisela Caballero, Andrea Arce

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires, Departamento de Ciencias Básicas UDB-Matemática y Centro de Procesamiento de Señales e Imágenes, Medrano 951, (C1179 AAQ), Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

arey@frba.utn.edu.ar

Recibido el 10 de agosto de 2021, aprobado el 2 de septiembre de 2021

Resumen

La teoría de grafos proporciona una fuente de recursos y herramientas para la representación y solución de problemas en diversas áreas. En el análisis de imágenes, se considera cada pixel como vértice de un grafo, asignando un peso a cada arista que describe cierta relación, por ejemplo la similitud de grises. En este trabajo se calculan medidas del grafo asociado a una imagen, con el propósito de analizar el crecimiento de una región de interés a lo largo del tiempo. Se diseñan experimentos con distintos esquemas de expansión, controlados y aleatorios. Los resultados obtenidos muestran una fuerte correlación para algunas medidas.

PALABRAS CLAVE: IMAGEN - GRAFO - MEDIDAS ESPECTRALES - MEDIDAS TOPOLÓGICAS

Abstract

Graph theory provides a set of resources and tools for the representation and solution of problems arisen in several areas. In image analysis, each pixel is considered as the vertex of a graph, assigning a weight to each edge that describes certain relationship, such as the similarity of gray levels. In this work, measures of the graph associated to an image are computed, with the aim of analyzing the growth of a region of interest through time. Experiments are designed for different expansion schemes, both controlled and random. The results obtained show a strong correlation for some measures.

KEYWORDS: IMAGE - GRAPH - SPECTRAL MEASURES - TOPOLOGICAL MEASURES

Introducción

Los orígenes de la teoría de grafos se remontan a comienzos del siglo XVIII con el problema de los siete puentes de la ciudad de Königsberg planteado por Euler (1736). Alrededor de un siglo después, conocidas como una de las primeras aplicaciones de esta teoría al campo de la Ingeniería, se publican las leyes de Kirchhoff (1847) utilizadas para calcular el voltaje y la corriente de un circuito eléctrico.

Otro problema famoso relacionado con la teoría de grafos es la conjetura de los cuatro colores (Cayley, 1879), donde se plantea que todo mapa puede ser coloreado usando a lo sumo cuatro colores de manera tal que las regiones limítrofes posean colores diferentes. No es hasta casi un siglo después que se presenta una prueba computacional de este resultado (Appel y Haken, 1976), quedando abierta aún una demostración formal.

Dentro de los autores más representativos de esta teoría, se puede mencionar a Kuratowski (1930) quien resuelve el problema de caracterización de grafos planares; a König (1936) quien publica el primer libro sobre teoría de grafos, a Dijkstra (1959) quien desarrolla un método utilizado en la resolución de algoritmos complejos en el área de la informática y a Harary (1969) quien destaca la variada y diversa aplicación de esta teoría a otros campos del conocimiento.

En el contexto real, los grafos que representan redes de telecomunicación, redes sociales, la *world wide web* (www) o la red de colaboración entre científicos, son extremadamente grandes dificultando e incluso imposibilitando el estudio de propiedades globales. Surge entonces la necesidad de modelar redes con el objetivo de explorar propiedades locales. Uno de los recursos más utilizados en este sentido es la teoría de grafos aleatorios, introducida por Erdős y Rényi (1959, 1960, 1961) y cuya idea central es pensar un grafo aleatorio como un organismo vivo que evoluciona a lo largo del tiempo, naciendo con una cantidad finita de vértices aislados y desarrollándose mediante la incorporación de aristas en forma aleatoria y sucesiva.

Los grafos han probado ser un instrumento valioso en diversas áreas del conocimiento. Dentro de su vasta colección de aplicaciones, podemos mencionar a modo de ejemplo su uso en Ciencias Sociales para el estudio de redes sociales (Wang *et al.*, 2017; Zhao *et al.*, 2019), en Física para el tendido de redes eléctricas (Dörfler *et al.*, 2018), en Química para la representación de compuestos (Bonchev, 1991), en Biología para la descripción de relaciones dentro de un hábitat (Urban *et al.*, 2009) o para el estudio de secuencias de ADN (Gao *et al.*, 2018), en Geología para el análisis de la morfología de sistemas de cuevas (Collon *et al.*, 2017), así como en Ciencias de la Computación (Lawrence, 1993; García, 2018), Ingeniería de Software (Collberg *et al.*, 2007; Owens *et al.*, 2021) y tratamiento de big data (Nisar *et al.*, 2013; Tan *et al.*, 2015).

En particular, en el procesamiento y análisis de imágenes la idea de trabajar con un grafo asociado ha sido utilizada con exitosos resultados (Sanfeliu *et al.*, 2002; Conte *et al.*, 2003; Lézoray y Grady, 2017; Cheung *et al.*, 2018; Iacovacci y Lacasa, 2019; Mou *et al.*, 2020; Valsesia *et al.*, 2020). Debido a que una imagen es un arreglo bidimensional, el diseño apropiado de un grafo asociado que conecte píxeles con cierto peso para reflejar la estructura de la imagen, puede ser útil al momento de realizar tareas de interpretación. En un comienzo, este tipo de técnicas basadas en la teoría de grafos no mostraron ser muy pragmáticas debido al alto costo computacional requerido por las mismas. Sin embargo, gracias a la nueva generación de computadoras que existe en la actualidad, el uso de grafos para el reconocimiento de patrones y el procesamiento de imágenes resulta de gran interés dentro de la comunidad científica.

Una imagen digital puede considerarse como una función de dos variables que representan la ubicación de cada pixel y cuya asignación es un valor real no negativo (Rosenfeld, 1969).

De este modo, una imagen en escala de grises puede representarse mediante una matriz donde cada entrada es un valor numérico que indica la luminancia del pixel correspondiente. En el tratamiento de imágenes con profundidad de 8 bits, los niveles de gris son números enteros que varían entre 0 y 255, siendo 0 el valor que corresponde al color negro y 255 el que representa al color blanco.

Cada grafo o red posee una estructura topológica propia, que caracteriza su conectividad y la dinámica del proceso que es ejecutado por la red. Es por ello que surge la necesidad de analizar medidas capaces de describir las propiedades más relevantes del grafo de interés. Existe en la literatura una variada cantidad de medidas de grafos cuya utilidad depende del contexto de la problemática a analizar (Hernández y Van Mieghem, 2011; Ellens y Kooij, 2013). En este trabajo se consideran medidas de distancia como el diámetro y el radio, medidas de conectividad como la asortatividad y la resistencia efectiva, y medidas espectrales como la conectividad algebraica y el radio espectral. El principal objetivo es indagar sobre una posible relación entre ellas y el crecimiento de una región de interés en una imagen.

La organización del trabajo continúa de la siguiente manera. En la sección Metodología, se introducen conceptos básicos de la teoría de grafos, notación necesaria y las medidas de interés. Asimismo, se describe un mapeo de una imagen sobre un grafo asociado. En la sección Parte experimental se detallan los ensayos en imágenes sintéticas sobre los cuales se realizarán las pruebas. Luego, en la sección Resultados y discusión se exhiben los alcances obtenidos en los experimentos desarrollados y se plantean observaciones a partir de los mismos. Finalmente, la última sección está dedicada a exponer las conclusiones que arrojó el estudio presentado junto con proyecciones para futuras investigaciones.

Metodología

Un grafo $G = (V, E)$ consiste en un conjunto de vértices $V = \{1, \dots, n\}$ y un conjunto de aristas E . La arista que une el vértice i con el vértice j se denota por e_{ij} y, en este caso, i y j se dicen vértices adyacentes. Un grafo se dice ponderado si existe una asignación

$$\begin{aligned} w: E &\rightarrow \mathbb{R} \\ e_{ij} &\mapsto w_{ij}, \end{aligned}$$

Donde:

w_{ij} indica el peso de la arista e_{ij} . Si $W = \{w_{ij}\}$ es el conjunto de todos los pesos, el grafo ponderado se indica como $G = (V, E, W)$.

Se puede observar que un grafo no ponderado puede pensarse como un grafo donde todas sus aristas tienen peso unitario.

Un camino entre el vértice i y el vértice j es una colección de vértices adyacentes $P_{ij}: \{i = i_1, i_2, \dots, i_m = j\}$. Se define la longitud de P_{ij} como $l(P_{ij}) = \sum_{h=1}^{m-1} w_{i_h i_{h+1}}$, siendo $L_{ij} = \min \{l(P_{ij})\}$ la longitud del camino más corto de i a j . Un grafo se dice conexo si para todo par de vértices distintos i y j , existe al menos un camino P_{ij} .

Una de las medidas de distancia más conocidas es la excentricidad, que se define para el vértice i como $e_i = \max \{L_{ij} : j \in V\}$. El valor máximo de todas las excentricidades se conoce como el diámetro del grafo, mientras que el valor mínimo representa el radio del mismo.

La Teoría Espectral de Grafos se basa en el estudio de autovectores y autovalores de matrices que están estrechamente relacionadas con los invariantes principales de un grafo y que permiten obtener información útil respecto del grafo o acerca de alguna aplicación que es modelada por el mismo (Cvetkovic et al., 1995). El conocimiento de propiedades espectrales

suele ser de gran utilidad para describir cualidades del grafo relacionadas con la densidad de los bordes, ya sea a nivel global o local.

Dado un grafo, se define su matriz de adyacencia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & \text{si } e_{ij} \in E, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En particular, el peso (strength en inglés) del vértice i es $s_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$

En el caso de grafos no ponderados, $s_i = d_i$ se conoce como el grado del vértice i y representa la cantidad de vértices adyacentes al mismo. El coeficiente de asortatividad de peso, que mide la correlación entre los pesos, se define como

$$r_s = \frac{\sum_{e_{ij} \in E} s_i s_j - \frac{1}{|E|} \left(\sum_{e_{ij} \in E} \frac{s_i + s_j}{2} \right)^2}{\frac{1}{2} \sum_{e_{ij} \in E} (s_i^2 + s_j^2) - \frac{1}{|E|} \left(\sum_{e_{ij} \in E} \frac{s_i + s_j}{2} \right)^2}.$$

De manera análoga, el coeficiente de asortatividad de grados se define reemplazando los pesos s_i por los correspondientes grados d_i . Se puede probar que $-1 \leq r_s \leq 1$. Los vértices tienen tendencia a conectarse con vértices de propiedades similares (en este caso peso o grado) si la asortatividad es positiva, mientras que si la asortatividad es negativa, la tendencia de los vértices es conectarse con otros vértices de características disímiles.

Otra matriz vinculada con el análisis espectral de grafos es la matriz laplaciana $L = D - A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde D es la matriz diagonal tal que $D_{ii} = s_i$.

El espectro de una matriz es el conjunto formado por sus autovalores. La matriz de adyacencia y la matriz laplaciana son ambas simétricas, por lo que los elementos de sus espectros son n números reales. Se ordena en forma decreciente a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ los autovalores de A $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ y los autovalores de L . El radio espectral de un grafo es

$$\rho = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

Una manera de medir la conectividad de un grafo es a través de la conectividad algebraica definida como μ_{n-1} . Se puede demostrar que este autovalor es no nulo si y sólo si el grafo es conexo (Fiedler, 1973).

Haciendo un paralelismo con los circuitos eléctricos, se puede pensar la resistencia efectiva $R(i, j)$ entre los vértices i y j de un grafo ponderado, como la resistencia eléctrica de una red con conductancias (pesos). Dicho de otro modo, $R(i, j)$ representa la diferencia de potencial que aparece entre las terminales. La resistencia efectiva resulta ser una medida de cercanía entre vértices, puesto que su valor es pequeño cuando existen muchos P_{ij} con pesos altos en sus aristas. Por el contrario, una alta resistencia significa que existen pocos P_{ij} con conductancia baja en sus lados. En el trabajo de Ghosh y colaboradores (2008) se prueba la siguiente fórmula para el cálculo de la resistencia efectiva (total) de un grafo:

$$R(G) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} R(i, j) = n \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_h}.$$

A una imagen I de ancho M y alto N , se le puede asociar un grafo ponderado $G(V, E, W)$ de la siguiente manera. Si P es el conjunto de pixeles de la imagen, se define la biyección:

$$f: P \rightarrow V \\ p = (x, y) \mapsto v_{(x-1)M+y}.$$

Para cada $i = 1, 2, \dots, MN$, sean respectivamente q_i y r_i , el cociente y el resto de la división de i por M . Entonces la función inversa de f está dada por

$$f^{-1}: V \rightarrow P$$

$$v_i \mapsto p_i = (q'_i + 1, r'_i),$$

Donde:

$$q'_i = q_i + 1 \text{ y } r'_i = r_i \text{ si } r_i \neq 0, \text{ y } q'_i = q_i \text{ y } r'_i = M \text{ en caso contrario.}$$

Por cada pixel $p = (x, y)$ se considera el conjunto formado por sus ocho vecinos próximos

$$N_p = \{(x \pm 1, y), (x, y \pm 1), (x \pm 1, y \pm 1)\}$$

De este modo, el conjunto de aristas queda definido como

$$E = \bigcup_{p \in P} \{e_{f(p)f(q)} : q \in N_p\}$$

Finalmente, se define una función de pesos para los lados:

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$e_{ij} \mapsto w_{i,j} = d_I(I_{f^{-1}(i)}, I_{f^{-1}(j)})$$

siendo I_p la intensidad del pixel p y d_I una distancia entre los valores de la imagen. En este trabajo, se elige $d_I(I_p, I_q) = |I_p - I_q|$, donde I_p representa el nivel de gris del pixel p .

Con fines ilustrativos, se considera la imagen de la Figura 1, cuyo grafo asociado se exhibe en la Figura 2. Su matriz de adyacencia es de tamaño 12×12 , con pesos $w_{1,4} = I, w_{1,5} = I, w_{2,4} = I, w_{2,5} = I, w_{3,5} = I, w_{4,8} = I, w_{5,6} = I, w_{5,8} = I, w_{5,9} = I, w_{6,8} = 2, w_{7,8} = I, w_{7,10} = 2, w_{7,11} = I, w_{8,9} = 2, w_{8,10} = I, w_{9,11} = 2, w_{9,12} = 2, w_{10,11} = I$ y el resto igual a cero.

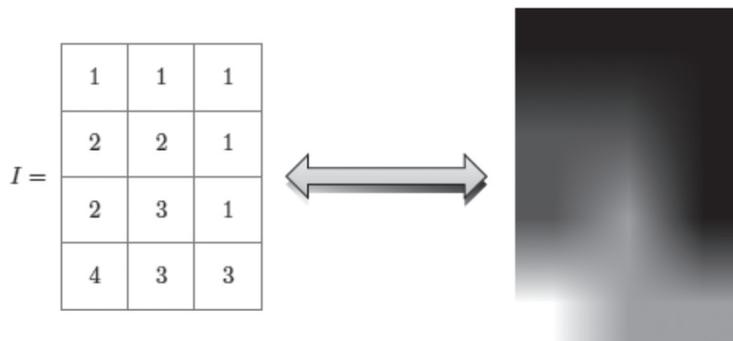


Fig. 1. Ejemplo de la relación entre un arreglo de niveles de gris y la imagen que representa

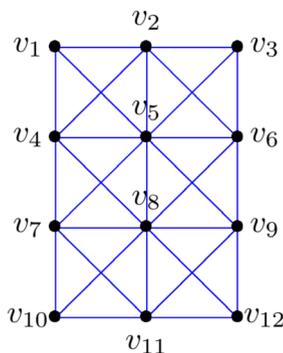


Fig. 2. Grafo asociado a la imagen de la Figura 1

Dada una colección temporal de imágenes correspondientes a una misma región, se obtiene una secuencia de grafos asociados. Resulta de interés estudiar si las medidas de grafos antes mencionadas presentan algún tipo de correlación a lo largo del tiempo. Uno de los índices más utilizados en el análisis de dependencia lineal entre variables cuantitativas es el coeficiente de correlación de Pearson, que puede calcularse para una muestra $\{(t_i, y_i); i = 1, \dots, n\}$ como:

$$R = \frac{n \sum_{i=1}^n t_i y_i - \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i\right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}}$$

Los valores de este coeficiente varían desde -1 , indicando una perfecta dependencia inversa (al incrementarse una de las variables, la otra decrece con la misma proporción); pasando por 0 cuando no hay dependencia lineal entre las variables; y alcanzando su valor máximo en 1 , cuando la dependencia directa (ambas variables aumentan o disminuyen en igual proporción) es total.

Parte experimental

Con el objetivo de analizar la información que algunas medidas de grafos podrían proporcionar para la detección del crecimiento de una región de interés en una imagen, llamada ROI de ahora en adelante por su acrónimo del inglés *region of interest*, se construye una imagen sintética de tamaño 50×50 . En la misma se puede detectar una ROI cuyos píxeles toman valores de gris en el rango $[220, 255]$ (área clara) y el fondo formado por píxeles dentro de una escala de gris entre 0 y 20 (área oscura).

El primer ensayo consiste en introducir un crecimiento totalmente controlado de la ROI en cuestión, a lo largo del tiempo. Es decir, se comienza con una imagen en el tiempo inicial $t = 0$. A medida que transcurre el tiempo t , se introducen, en cada paso, ciertas perturbaciones en la ROI que dan lugar a una región de mayor tamaño. Esta experiencia genera una nueva imagen por cada tiempo observado. Es decir, tenemos una secuencia temporal de imágenes con cambios en el crecimiento de la ROI. A continuación, se detallan los experimentos desarrollados y se refiere a la Figura 3 como ilustración de los mismos.

Experimento 1: ROI en forma de cuadrado cuyos lados tienen una longitud de 10 píxeles en el tiempo inicial, y que se transforma en un cuadrado concéntrico con lados de longitud $10+i$ en el tiempo $t = i$, para $i = 0, 1, \dots, 30$.

Experimento 2: ROI en forma de cuadrado cuyos lados tienen una longitud de 10 píxeles en el tiempo inicial, y que se transforma en un rectángulo cuyos vértices inferiores permanecen fijos y con lados verticales de longitud $10+i$ en el tiempo $t = i$, para $i = 0, 1, \dots, 30$.

Experimento 3: ROI en forma de cuadrado cuyos lados tienen una longitud de 10 píxeles en el tiempo inicial, y que se transforma en un cuadrado cuyo vértice inferior izquierdo se mantiene fijo y con lados de longitud $10+i$ en el tiempo $t = i$, para $i = 0, 1, \dots, 30$.

Experimento 4: ROI en forma de cuadrado cuyos lados tienen una longitud de 10 píxeles en el tiempo inicial, y que se transforma en un rectángulo que mantiene la posición de su lado vertical izquierdo, con lados verticales de longitud $10 + 2i$ y con lados horizontales de longitud $10 + i$, en el tiempo $t = i$, para $i = 0, 1, \dots, 30$.

Experimento 5: ROI en forma de círculo cuyo radio tienen una longitud de 5 píxeles en el tiempo inicial, y que se transforma en un círculo concéntrico con radio de longitud $5 + i$ en el tiempo $t = i$, para $i = 0, 1, \dots, 15$.

Experimento 6: ROI en forma de círculo cuyo radio tienen una longitud de 5 píxeles en el tiempo inicial, y que se transforma en el interior de una elipse concéntrica con semieje horizontal invariante y semieje vertical de longitud $5 + i$ en el tiempo $t = i$, para

$i = 0, 1, \dots, 15$.

Experimento 7: ROI en forma de semicírculo de diámetro horizontal y cuyo radio tiene una longitud de 5 píxeles en el tiempo inicial, y que se transforma en un semicírculo concéntrico de diámetro horizontal y con radio de longitud $5+i$ en el tiempo $t = i$, para $i = 0, 1, \dots, 15$.

Se observa que, en todos los casos presentados, el centro de la ROI inicial coincide con el centro de la imagen. En los experimentos 1, 5 y 6 el crecimiento es homogéneo en el sentido de los cuatro puntos cardinales, mientras que el experimento 2 el crecimiento es en sentido norte, en el 3 en sentido noreste, en el 4 hacia todos los puntos cardinales salvo el oeste y en el 7 hacia todos los puntos cardinales salvo el sur.

En cada experimento presentado se produce una colección de n imágenes I_i , cuyo grafo asociado se denota por G_i . Para los primeros cuatro experimentos $n = 31$, mientras que para el resto $n = 16$.

El próximo paso consiste en calcular las siguientes medidas para cada grafo G_i : diámetro, radio, asortatividad de pesos, radio espectral ρ , conectividad algebraica μ y resistencia efectiva.

Finalmente, se diseña un segundo ensayo (experimento 8) con el objetivo de analizar si los resultados obtenidos para un crecimiento completamente supervisado se preservan cuando el crecimiento de la ROI se realiza de manera aleatoria y en cualquier dirección. A tal

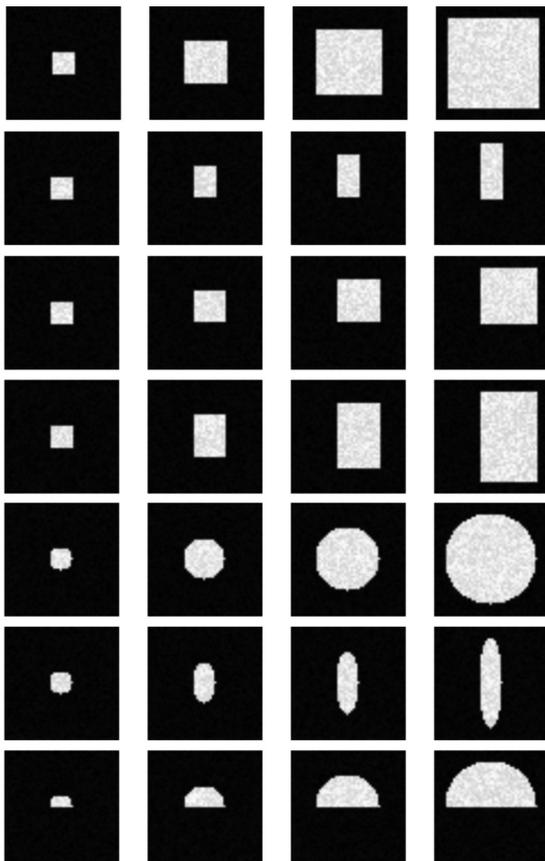


Fig. 3. Ilustración de las imágenes obtenidas en los experimentos desde el 1 (primera fila) hasta el 7 (última fila). Cada columna representa el resultado en los tiempos $t = 0$, $t = (n - 1)/3$, $t = 2(n - 1)/3$ y $t = n$ (de izquierda a derecha), donde $n = 31$ para los experimentos 1-4 y $n = 16$ para los experimentos 5-7

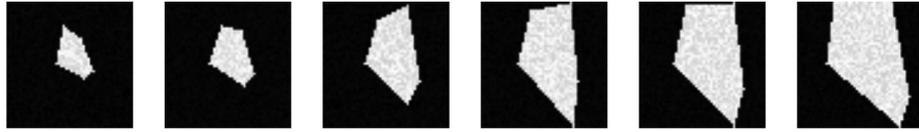


Fig. 4. Ejemplo de imágenes obtenidas al aplicar el experimento 8 a lo largo del tiempo

fin, se considera una ROI en forma de pentágono en el tiempo inicial. Su transformación a lo largo del tiempo es iterativa y se lleva a cabo mediante el siguiente algoritmo:

1. Se etiquetan los vértices del pentágono a transformar como v_1, \dots, v_5 .
2. Se le asigna a cada v_j un número $m_j \in \{0,1\}$.
 - 2.1. Si $m_j = 0$, se considera $v_j' = v_j$ lo que implica que el vértice se mantiene en la misma posición.
 - 2.2. Si $m_j = 1$, se modifica el vértice eligiendo aleatoriamente un punto v_j' en el segmento que une el centro c del pentágono con el vértice v_j con el fin de obtener un píxel en la imagen tal que $d(c, v_j') > d(c, v_j)$, donde d indica la distancia euclídeana entre los puntos.
3. El pentágono transformado se obtiene mediante los vértices v_1', \dots, v_5' .

En la Figura 4 se exhiben, a modo de ejemplo, las imágenes obtenidas como resultado de una aplicación arbitraria de este algoritmo luego de 5 iteraciones.

En el caso de este último experimento aleatorio, el tiempo toma valores $t = 0, 1, \dots, 19$, obteniendo 20 imágenes por cada implementación. A partir de este momento se prosigue de la misma manera que para los experimentos 1-7. Con el propósito de evaluar la influencia de la aleatoriedad de este nuevo ensayo en los resultados del estudio de correlación, se realiza una simulación de Monte Carlo replicando cien veces la propuesta presentada.

Los experimentos y cálculos se desarrollaron bajo el programa R versión 4.1.0 (R Core Team, 2021) en un procesador Intel(R) Core(TM) i7-6700 CPU @ 3,40GHz 3,41 GHz con memoria RAM de 16.0 GB.

Resultados y discusión

En la Tabla 1 se presentan los valores obtenidos para el coeficiente de correlación de Pearson y el p -valor correspondiente al ajuste lineal de cada una de las medidas de grafos consideradas y por cada experimento descrito en la sección anterior. Asimismo, en la Figura 5 se muestra la ubicación de los puntos dados por las medidas a lo largo del tiempo y la recta que mejor los ajusta en el caso del experimento 1.

Se puede observar la fuerte correlación directa en el caso de la conectividad algebraica en todos los experimentos ejecutados con significancia estadística puesto que los p -valores arrojan resultados muy pequeños. Este hecho se repite al considerar la resistencia efectiva, siendo la correlación inversa para esta medida. Otro indicador que también presenta una significativa correlación positiva es el radio del grafo asociado, seguido del diámetro aunque con valores inferiores para el coeficiente de Pearson, especialmente en los experimentos 2 y 6. Algo similar ocurre al analizar la asortatividad de pesos con una marcada correlación negativa, siendo notoriamente más débil para los experimentos 2 y 6. Finalmente, el radio espectral no parece seguir ningún patrón de comportamiento en cuanto a la correlación y, de hecho, los p -valores adoptan valores muy altos.

Una posible explicación de resultados menos contundentes para algunas medidas en los experimentos 2 y 6 es que el aumento del área ocupada por la ROI es considerablemente menor con respecto a los demás experimentos analizados.

Tabla 1. Resultados del coeficiente de Pearson (R) y del p -valor correspondiente para cada medida de grafo, de acuerdo a cada experimento desarrollado

		Experimento						
		1	2	3	4	5	6	7
Diámetro	R	0,98	0,72	0,89	0,94	0,97	0,74	0,93
	p	2,2e-16	5,9e-06	2,5e-11	6,5e-15	3,3e-10	0,0011	1,2e-07
Radio	R	0,96	0,84	0,96	0,96	0,95	0,90	0,99
	p	2,2e-16	4,4e-09	2,2e-16	2,2e-16	3,4e-08	2,1e-06	9,4e-13
Asortatividad	R	-0,98	-0,67	-0,87	-0,97	-0,91	-0,79	-0,89
	p	2,2e-16	4e-15	2e-10	2,2e-16	9,7e-07	0,00024	2,9e-06
Conectividad algebraica	R	1,00	0,98	0,96	0,99	0,99	0,99	1,00
	p	2,2e-16	2,2e-16	2,2e-16	2,2e-16	5,1e-14	3,4e-14	2,2e-16
Radio espectral	R	-0,03	-0,14	-0,1	0,12	0,15	0,19	0,23
	p	0,88	0,44	0,58	0,51	0,58	0,47	0,40
Resistencia efectiva	R	-1,00	-0,99	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00
	p	2,2e-16	2,2e-16	2,2e-16	2,2e-16	1,4e-15	2,2e-16	2,2e-16

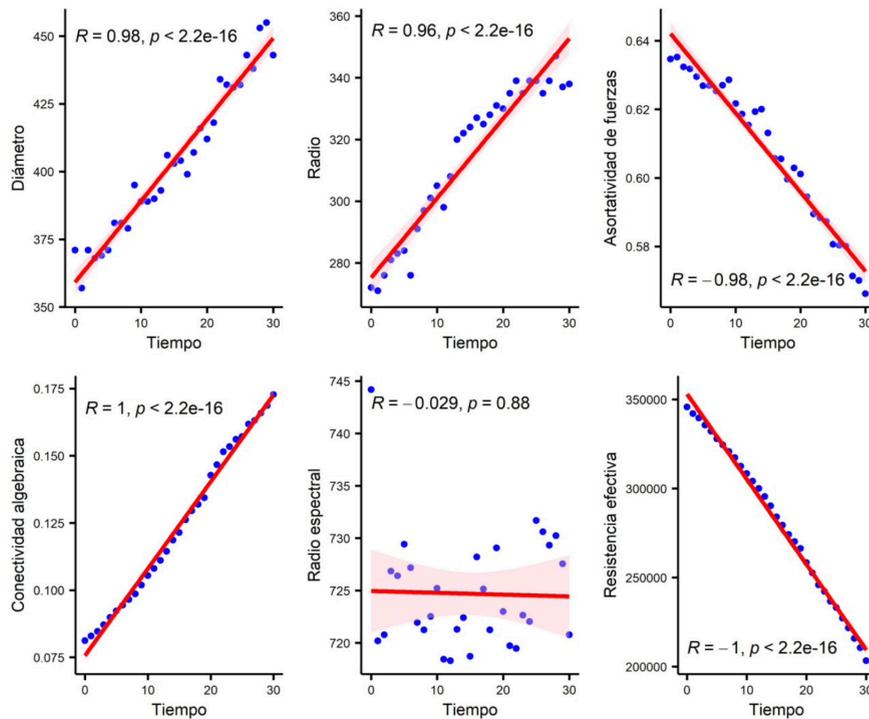


Fig. 5. Recta de ajuste de las medidas de grafos en función del tiempo para el experimento 1

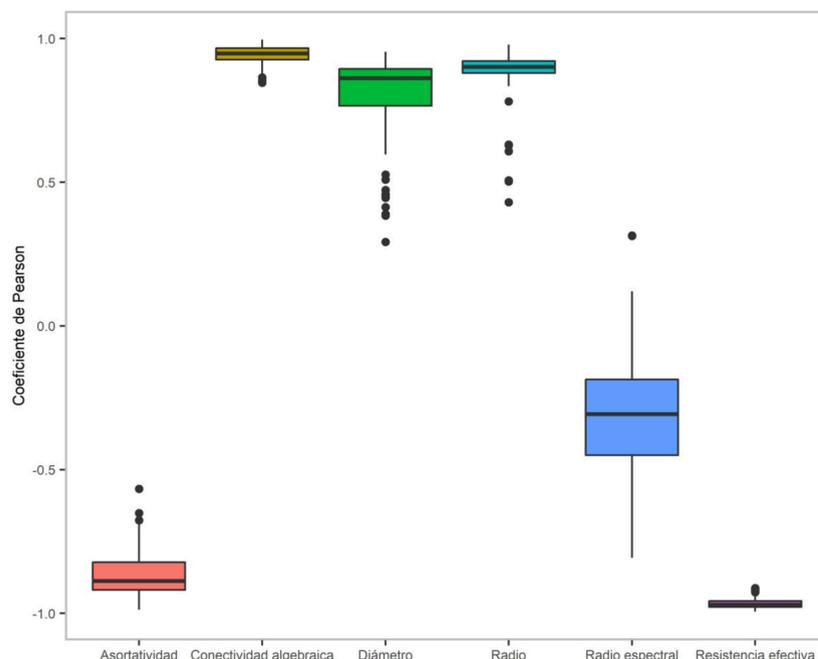


Fig. 6. Distribución del coeficiente de Pearson para las medidas de grafos calculadas en el experimento 8

En la Figura 6 se muestran los diagramas de cajas y bigotes o boxplots (en inglés) de la distribución del coeficiente de Pearson por cada medida considerada en el experimento 8, luego de una simulación de Monte Carlo de 100 ensayos. Se puede observar el mismo patrón de comportamiento que se evidencia en los experimentos anteriores. La correlación positiva más fuerte se presenta en la conectividad algebraica, con una media de 0,9418 y p -valor de $9,2e-08$, seguida del radio con un promedio de 0,8833 y p -valor igual a $1,2e-3$. La mayor correlación negativa se obtiene para la resistencia efectiva, siendo su media igual a -0,966 y p -valor $6,8e-10$. La asortatividad de pesos también muestra una importante dependencia lineal inversa con media de -0,863 y significancia $1,6e-4$. El diámetro depende linealmente de forma directa pero en menor grado y con una dispersión mayor en los valores que se obtienen en cada corrida del experimento. Por último, el radio espectral no manifiesta una dependencia lineal con respecto al tiempo.

Conclusiones

En el presente trabajo se estudia la manera en que algunas medidas de grafos pueden dar información sobre el comportamiento del tamaño de una región de interés en una imagen. Con este propósito, dada una imagen en escala de grises, se le asocia un grafo tal que cada vértice representa un pixel de la imagen y cuyas posibles aristas son aquellas que conectan los ocho vecinos adyacentes y a las cuales se les asigna un peso que mide la diferencia de gris entre pixeles de la vecindad.

Se diseñan e implementan siete experimentos que consisten en el crecimiento controlado de una región de interés en una imagen sintética en distintos sentidos, ya sea hacia los márgenes laterales, inferior o superior. De este modo, se obtiene una colección temporal de imágenes para las cuales se calculan medidas topológicas y espectrales de sus grafos asociados. Se concluye con un último experimento donde se repite el análisis pero frente a un crecimiento aleatorio de la región de interés.

En todos los casos de estudio presentados, tanto la conectividad algebraica como la resis-

tencia efectiva resultaron ser las medidas más estables al mostrar una correlación directa en el primer caso e inversa en el segundo. Esto se pone en evidencia cuando el área de la región de interés no crece de manera tan significativa, donde para medidas como el diámetro o la asortatividad de pesos no se detecta tan claramente una relación lineal a lo largo del tiempo. En líneas generales, el radio del grafo también demuestra una alta correlación directa, seguido en menor dimensión por el diámetro del grafo. Por el contrario, el radio espectral no arroja resultados estadísticamente significativos en cuanto a la presencia de dependencia lineal a medida que transcurre el tiempo.

Los resultados obtenidos abren la puerta a nuevas investigaciones donde se puedan aplicar ciertas medidas del grafo asociado a una imagen real para detectar o predecir por ejemplo el crecimiento demográfico de una ciudad. Esta motivación surge al considerar una imagen satelital nocturna de una zona urbana, pensando que este tipo de regiones están representadas por píxeles con valores altos de gris debido a la presencia de iluminación artificial. Dada una secuencia temporal de imágenes satelitales nocturnas de una ciudad, queda de este modo, planteada la siguiente hipótesis: “Si para los grafos asociados a cada una de las imágenes, la resistencia efectiva decrece linealmente mientras que la conectividad algebraica crece de manera lineal, entonces se está en presencia de un crecimiento del área que ocupa la ciudad.”

Referencias

- APPEL, K. y HAKEN, W., (1976) Every planar map is four colorable. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 82(5), 711-712.
- CAYLEY, A., (1879) On the colorings of maps. *Proc. Royal Geographical Society* 1, 259-261.
- BONCHEV, D., (1991) *Chemical graph theory: introduction and fundamentals*. CRC Press, 1
- CHEUNG, G.; MAGLI, E.; TANAKA, Y. y NG, M. K., (2018) Graph spectral image processing. *Proceedings of the IEEE*, 106(5), 907-930.
- COLLBERG, C. S.; THOMBORSON, C. y TOWNSEND, G. M., (2007) Dynamic graph-based software fingerprinting. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS)*, 29(6), 35:1-67.
- COLLON, P.; BERNASCONI, D.; VUILLEUMIER, C. y RENARD, P., (2017) Statistical metrics for the characterization of karst network geometry and topology. *Geomorphology*, 283, 122-142.
- CONTE, D.; FOGGIA, P.; SANSONE, C. y VENTO, M., (2003) Graph matching applications in pattern recognition and image processing. *Proceedings 2003 International Conference on Image Processing IEEE*, 2, 21-24.
- CVETKOVIC, D.; DOOB, M. y SACHS, H., (1995) *Spectra of Graphs—Theory and Applications*, III revised and enlarged ed. Johan Ambrosius Bart Verlag, Heidelberg, Leipzig.
- DIJKSTRA, E. W., (1959) A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische mathematik*, 1(1), 269-271.
- DÖRFLER, F.; SIMPSON-PORCO, J. W. y BULLO, F., (2018) Electrical networks and algebraic graph theory: Models, properties, and applications. *Proceedings of the IEEE*, 106(5), 977-1005.
- ELLENS, W. y KOOLJ, R. E., (2013) Graph measures and network robustness. *arXiv preprint arXiv:1311.5064*.
- EULER, L., (1736) *Solutio problematis in geometria simpliciorum pertinentis*. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 128-140 (disponible en 1741).
- ERDÖS, P. y RÉNYI, A., (1959) On random graphs. *Publicationes Mathematicae*, 6, 290-297.
- ERDÖS, P. y RÉNYI, A., (1960) On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, 5(1), 17-60.

- ERDÖS, P. y RÉNYI, A., (1961) On the strength of connectedness of a random graph. *Acta Mathematica Hungarica*, 12(1), 261-267.
- FIEDLER, M., (1973) Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 23(2), 298-305.
- GARCÍA, D. A., (2018) Grafos expansores en criptografía. *Revista Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información*, 5(10), 39-48.
- GAO, W.; WU, H.; SIDDIQUI, M. K. y BAIG, A. Q., (2018) Study of biological networks using graph theory. *Saudi Journal of Biological Sciences*, 25(6), 1212-1219.
- HARARY, F. (1969). *Graph Theory*. Addison-Wesley Series in Mathematics, Reading, Massachusetts.
- HERNÁNDEZ, J. M. y VAN MIEGHEM, P., (2011) Classification of graph metrics. *Delft University of Technology: Mekelweg, The Netherlands*, 1-20.
- IACOVACCI, J. y LACASA, L., (2019) Visibility graphs for image processing. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 42(4), 974-987.
- KIRCHHOFF, G., (1847) Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird. *Annalen der Physik*, 148(12), 497-508.
- KÖNIG, D. (1936) *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen: Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe*. Akademische Verlagsgesellschaft MBH, 16.
- KURATOWSKI, K., (1930) Sur le probleme des courbes gauches en topologie. *Fundamenta Mathematicae*, 15(1), 271-283.
- LAWRENCE, J., (1993) *Introduction to neural networks*. California Scientific Software.
- LÉZORAY, O. y GRADY, L., (2017) *Image processing and analysis with graphs: theory and practice*. CRC Press.
- MOU, L.; LU, X.; LI, X. y ZHU, X. X., (2020) Nonlocal graph convolutional networks for hyperspectral image classification. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 58(12), 8246-8257.
- NISAR, M. U.; FARD, A. y MILLER, J. A., (2013) Techniques for graph analytics on big data. *2013 IEEE International Congress on Big Data*, 255-262.
- OWENS, G.; KHUSANOV, J., ZHOLDOSHOV, A. y DZHOLBUNOV, A., (2021) *Graph Theory, Scheduling Problems, and Its Modern Applications*. Scheduling Problems, and Its Modern Applications.
- R CORE TEAM, (2021) *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- ROSENFELD, A., (1969) Picture processing by computer. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 1(3), 147-176.
- SANFELIU, A.; ALQUÉZAR, R.; ANDRADE, J.; CLIMENT, J.; SERRATOSA, F. y VERGÉS, J., (2002) Graph-based representations and techniques for image processing and image analysis. *Pattern recognition*, 35(3), 639-650.
- TAN, K. H.; ZHAN, Y.; JI, G.; YE, F. y CHANG, C., (2015) Harvesting big data to enhance supply chain innovation capabilities: An analytic infrastructure based on deduction graph. *International Journal of Production Economics*, 165, 223-233.
- URBAN, D. L.; MINOR, E. S.; TREML, E. A. y SCHICK, R. S., (2009) Graph models of habitat mosaics. *Ecology letters*, 12(3), 260-273.
- VALSESIA, D.; FRACASTORO, G. y MAGLI, E., (2020) Deep graph-convolutional image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 29, 8226-8237.
- WANG, B.; GONG, N. Z. y FU, H., (2017) GANG: Detecting fraudulent users in online social networks via guilt-by-association on directed graphs. *2017 IEEE International Conference on Data Mining (ICDM)*, 465-474.
- ZHAO, Z.; LI, C.; ZHANG, X.; CHICLANA, F. y VIEDMA, E. H., (2019) An incremental method to detect communities in dynamic evolving social networks. *Knowledge-Based Systems*, 163, 404-415.